NOMS Prénoms des élèves du groupe :

-
-
-
-

Travail de groupe n$^{\text{o}}$ 2

1 heure

	Exercice 1-1.	Exercice 1-2.	Exercice 2-A	Exercice 2-B	Exercice 2-C	BONUS	Tenue du groupe
Total	3	4	3	7	1	2	2

Exercice 1

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Soit n un entier naturel non nul tel que $n \equiv 0 \; [21]$ et $n \equiv 0 \; [30]$

   Affirmation n$^{\text{o}}$ 1 : « $n \equiv 0 \; [21 \times 30]$ »

2. Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture $\overline{abc}$ en base 10 et N a pour écriture $\overline{bca}$ en base 10.

   Affirmation n$^{\text{o}}$ 2 :

   « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Exercice 2
Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2 009 par 16.
2. En déduire que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \quad [16]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1.(a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.

(b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n \left[{u_n}^4 + 5\left({u_n}^3 + 2{u_n}^2 + 2u_n + 1\right)\right]$$

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2.(a) Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \quad [625]$.

(b) Démontrer alors que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \quad [625]$.

Partie C

1. On admet que les résultats des parties précédentes permettent d'en déduire que $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par 10 000. Conclure.

BONUS
Trouver tous les entiers n tels que 10 divise $n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$